

Yus Mochamad Cholily
Jurusan Pendidikan Matematika
Universitas Muhammadiyah Malang
Email: yus@umm.ac.id atau ymcholily@gmail.com

A. Latihan Persamaan Rekursif Linier Homogen

Tentukan solusi umum dari persamaan rekursif berikut.

- 1.a $x_n = 2x_{n-1}$ untuk $n > 0$ dan $x_0 = 1$.
- 1.b $2x_n = x_{n-1} + 3$ untuk $n \geq 1$ dan $x_0 = 0$.
- 1.c $x_n = 3x_{n-1} + n$ untuk $n \geq 1$ dan $x_0 = 0$.
- 2.a $x_n - 5x_{n-1} + 4x_{n-2} = 0$ untuk $n \geq 2$ dengan $x_0 = 0$ dan $x_1 = 1$.
- 2.b $2x_n - 18x_{n-1} + 18x_{n-2} = 0$ untuk $n \geq 2$ dengan $x_0 = 1$ dan $x_1 = 2$.

B. Relasi Rekursif Linier Non Homogen

Untuk menyelesaikan relasi rekursif linier non homogen sampai saat ini masih berbentuk parsial. Hal ini mengandung makna menyelesaikan relasi semacam ini masih tergantung pada fungsi pembuat non homogennya. Untuk memudahkan memahami perhatikan dua contoh berikut.

Sebuah persamaan kuadrat $x^2 - 4x + 6$.

Contoh.

1. Tentukan solution dari persamaan rekursif $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2$, dengan syarat awal $a_0 = 1$ dan $a_1 = -1$
2. Tentukan solution dari persamaan rekursif $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = n^2$, dengan syarat awal $a_0 = 1$ dan $a_1 = -1$

Jawab.

1. Solusi PRL tersebut adalah $a_n = a_n(H) + a_n(P)$. Langkah pertama kita akan mencari $a_n(H)$ dan langkah kedua mencari $a_n(P)$. PRLH-nya adalah $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$ dan memiliki persamaan karakteristik $r^2 - 5r + 6 = 0$ atau $(r-2)(r-3) = 0$. Dengan demikian akar-akarnya adalah $r = 2$ dan $r = 3$. Solusi umum dari PRLH adalah $a_n(H) = c_1 2^n + c_2 3^n$. Langkah kedua adalah mencari $a_n(P)$. Dimisalkan A merupakan solusi parsialnya yaitu $a_n(P) = A$. Substitusikan ke PRL yaitu $A - 5A + 6A = 2$

atau $A = 1$. Jadi solusi umum dari PRL adalah $a_n = c_1 2^n + c_2 3^n + 1$. Dengan mensubstitusikan kondisi awal maka diperoleh $c_1 = 2$ dan $c_2 = -2$. Dengan demikian solusi dari PRL tersebut adalah $a_n = 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n + 1$.

2. Hal yang sama dapat dilakukan seperti pada Contoh 1 di atas. Selanjutnya akan dicari solusi khususnya saja. Solusi khusus dari polinomial $f(n) = n^2$ adalah $a_n(P) = A_0 + A_1 n + A_2 n^2$. Polinomial a_n ini disubstitusikan ke dalam PRL yaitu $A_0 + A_1 n + A_2 n^2 - 5(A_0 + A_1(n-1) + A_2(n-1)^2) + 6(A_0 + A_1(n-2) + A_2(n-2)^2) = n^2$. Dengan menjabarkan persamaan tersebut dan sifat kesamaan dua buah polinomial maka diperoleh sistem persamaan tiga variabel $\{A_0, A_1$ dan $A_2\}$. Menyelesaikan sistem persamaan ini maka diperoleh nilai-nilai tersebut.

C. Latihan Persamaan Rekursif Non Homogen

Tentukan solusi umum dari persamaan rekursif berikut ini.

2.1a $x_n - 5x_{n-1} + 4x_{n-2} = 4$ untuk $n \geq 2$ dengan $x_0 = 0$ dan $x_1 = 1$.

2.1b $2x_n - 18x_{n-1} + 18x_{n-2} = -4$ untuk $n \geq 2$ dengan $x_0 = 1$ dan $x_1 = 2$.

2.1c $x_n - 5x_{n-1} + 4x_{n-2} = n$ untuk $n \geq 2$ dengan $x_0 = 0$ dan $x_1 = 1$.

2.1d $2x_n - 18x_{n-1} + 18x_{n-2} = 2n$ untuk $n \geq 2$ dengan $x_0 = 1$ dan $x_1 = 2$.