Jawaban UTS Matematika Diskrit

Yus Mochamad Cholily

1.a Diketahui a membagi b dan b membagi c maka dapat dituliskan bahwa $b = ma$, demikian juga $c = nb$ untuk suatu bilangan bulat m dan n. Dengan demikian dapat dituliskan bahwa $c = nb = nma$. Karena n dan m bilangan bulat maka berdasar sifat ketertutupan pada bilangan bulat maka $k = nm$ juga bilangan bulat. Dengan demikian $c = ka$ yang berarti aa membagi c.

1.b Pembuktian dilakukan dengan menggunakan induksi matematika.

- Untuk $n = 1$ maka $n^3 - 4n + 6 = 1^3 - 4 + 6 = 3$ yang merupakan kelipatan 3. Jadi terbukti pernyataan benar untuk $n = 1$.
- Diasumsikan pernnyataan benar untuk $n = k$, jadi $n^3 - 4n + 6 = 3p$ untuk suatu bilangan bulat p.
- Selanjutnya dibuktikan bahwa pernyataan ini benar untuk $n = k+1$. $n^3 - 4n + 6 = (k+1)^3 - 4(k+1) + 6 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - 4k - 4 + 6 = (k^3 - 4k + 6) + 3(k^2 + k + 1) = 3p + 3(k^2 + k + 1)$.
  Hal ini merupakan kelipatan 3. Jadi pernyataan tersebut benar untuk semua bilangan bulat positif n.

1.c Untuk membuktian pernyataan bahwa $\sqrt{3}$ bilangan irasional diperlukan pernyataan bahwa "jika x^2 kelipatan tiga maka x juga merupakan kelipatan 3. (diasumsikan semua mahasiswa ini sudah mengerti)
Andaikan $\sqrt{3}$ merupakan bilangan rasional maka $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ dengan a dan b bilangan bulat dan bersifat relatif prima. Dengan mengkuadratkan kedua ruas maka diperoleh hubungan $a^2 = 3b^2$. Dari persamaan terakhir dapat disimpulkan bahwa a^2 merupakan kelipatan 3 dan dapat yang berakibat juga bahwa $a = 3p$ untuk suatu bilangan bulat p. Dengan mensubstitusi a diperoleh hubungan $3p^2 = b^2$. Dengan argumentasi yang sama seperti pada a maka diperoleh bahwa b juga merupakan kelipatan 3. Hal ini bertentangan bahwa a dan b relatif prima.
Jadi $\sqrt{3}$ merupakan bilangan irasional.

2.a Untuk menunjukkan bahwa R merupakan relasi ekivalen maka harus ditunjukkan bawah relasi tersebut bersifat refleksif, simetri dan transitif. Misal (a, b), (c, d) dan (e, f) merupakan unsur di $A \times B$.

Refleksif. Perhatikan hubungan $ab = ab$ ini berarti bahwa $(a, b)R(a, b)$.

Simetri. Misal $(a, b)R(c, d)$ yang berarti bahwa $ad = bc$ dan hal ini bisa dituliskan $cb = ad$. Dengan demikian $(c, d)R(a, b)$.

Transitif. Misal $(a, b)R(c, d)$ dan $(c, d)R(e, f)$ selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(a, b)R(e, f)$. Karena $(a, b)R(c, d)$ dan $(c, d)R(e, f)$ maka berlaku $ad = bc$ dan $cf = de$. Dari persamaan terakhir didapat $adcf = bcde$ atau $af = be$. Jadi terlihat bahwa $(a, b)R(e, f)$.

2.b Misal (a, b) berelasi dengan (1,2) maka berlaku hubungan $2a = b$. Dengan demikian (1,2) berelasi dengan semua pasangan $(a, 2a)$ untuk semua a unsur di A. Jadi kelas ekivalen dari $(1, 2)$ adalah $[(1, 2)] = \{(a, 2a)|a$ bilangan bulat yang tidak nol$\}$.

3.a Karena R bersifat refleksif maka $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$. Selain itu (a, a) juga selalu termuat di R^{-1} jadi relasi invers ini juga bersifat refleksif.

3.b Karena R dan S bersifat rfleksif maka setiap (a, a) selalu termuat di R maupun S jadi $R \cap S$ bersifat refleksif. Hal yang sama juga untuk $R \cup S$.

3.c Ambil (a, b) di R^{-1}. Dengan demikian $(b, a) \in R$. Karena R bersifat simetrik maka $(a, b) \in R$. Hal ini mengakibatkan (b, a) termuat di R^{-1}. Jadi R^{-1} bersifat simetrik.

3.d Ambil (a, b) unsur di $R \cap S$. Karena R dan S simetrik maka (b, a) juga berada di R maupun S. dengan demikian $R \cap S$ bersifat simtrik. Hal yang sama juga $R \cup S$ juga bersifat simetrik.

4.a Ambil x dan y di R sehingga $f(x) = f(y)$ yaitu $2x+1 = 2y+1$. Dari sini terlihat bahwa $x = y$. Jadi f adalah fungsi satu-satu. Selanjutnya ambil sebarang y di R (Kodomain). Tentukan $x = \frac{y-1}{2}$ maka mudah dihitung bahwa $f(x) = y$. Dengan demikian f merupakan fungsi yang pada. Jadi f merupakan fungsi yang bijketif.

4.b Ambil x di R sehingga $f(x) = f(y)$ yaitu $x^3+2 = y^3+2$. Dari sini dapat dihitung bahwa $x = y$. Jadi f fungsi yang satu-satu. Untuk setiap diberikan Sebarang nilai y di kodomain maka pilih $x = \sqrt[3]{y - 2}$ dan bila dihitung diperoleh bahwa $f(x) = y$. Dengan demikian jelas fungsi ini adalah onto. Jadi f merupakan fungsi yang bijektif.

4.c Ambil dua bilangan -3 dan 3 dan mudah dihitung bahwa $|-3| = |3| = 3$. Dengan demikian f bukan fungsi yang satu-satu. Begitu juga karena harga mutlah selalu bernilai positif maka semua bilangan negatif pada kodomain tidak memiliki pasangan. Jadi f *bukan* merupakan fungsi satu-satu maupun onto.

4.d Fungsi kuadrat $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ jelas *bukan* fungsi yang satu-satu serta onto. Hal ini bisa dilihat bahwa $f(-1) = f(3) = 12$ dan tidak ada x sehingga $f(x) = 0$.

5.a Bisa dihitung langsung bahwa $C(2n, 2) = 2n^2 - n$ begitu juga $2C(n, 2) + n^2 = 2n^2 - n$ jadi dengan sifat transisif diperoleh $C(2n, 2) = 2C(n, 2) + n^2$.

5.b Cara paling gampang yang sama dengan soal 5.a

5.c Perhatikan bahwa $(a+b)^n = C(n,0)a^n + C(n,1)a^{n-1}b + C(n,2)a^{n-2}b^2 + \cdots + C(n,n)b^n$. Dari persamaan binomial ini dan mengambil kasus $a = b = 1$ maka diperoleh $C(n,0) + C(n,1) + \cdots + C(n,n) = 2^n$.

6.a Banyak macam teman yang bisa diundang adalah combinasi 6 dari 10 yaitu C_6^{10}.

6.b Bila yang diundang adalah separuh laki-laki dan separuh perempuan maka banyak macamnya adalah: $C_3^6 \times C_3^4$.

6.c Semua perempuan harus terundang maka banyak macamnya adalah: $C_2^6 \times C_4^4$.

6.d Semua laki-laki diundang maka banyak macamnya adalah: C_6^6.